

УДК 629-06

Е. А. Чернышев, канд. техн. наук
ГОУВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ», ДНР
E-mail: chernyshev81@mail.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВИБРАЦИОННОГО УВОДА ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗАНИЕМ

В статье рассмотрено теоретическое описание вибрационного увода при обработке резанием на примере радиальных колебаний одномассовой системы с одной степенью свободы при точении. Выполнено сравнение величины вибрационного увода, вычисленного разными методами, с упругим отжатием, найденным из уравнения статики.

Ключевые слова: колебания, вибрации, жесткость, вибрационный увод, упругое отжатие.

Е. А. Chernyshev

THEORETICAL DESCRIPTION OF OSCILLATION DISPLACEMENT IN CUTTING PROCESSING

The paper considers the theoretical description of oscillation displacement in cutting processing on the example of radial vibrations of a single-mass system with one degree of freedom in turning. A comparison of the magnitude of the oscillation displacement, calculated by different methods, with the elastic squeezing, obtained from the static equation, is performed.

Keywords: oscillations, vibrations, rigidity, oscillation displacement, elastic squeezing

Введение.

При обработке резанием всегда происходит упругое отжатие инструмента и заготовки. Оно может существенно влиять на точность обработки, поэтому его необходимо учитывать на стадии разработки технологической операции. Эти упругие деформации зависят от жесткости системы и сил резания, но имеют принципиально динамическую природу, поскольку возникают не в статическом положении, а при обработке, которая часто сопровождается вибрациями. По этой причине упругое отжатие является не чем иным, как вибрационным уводом, - смещением положения равновесия [1].

Величину упругого отжатия часто определяют приближенно из статического представления [2, 3], что можно считать нулевым приближением, которое иногда может быть довольно точным. Однако необходимо учитывать его принципиально динамическую природу. Чаще всего эти отжатия представляют интерес прежде всего практического свойства, но в данной работе дается теоретическое описание вибрационного увода при обработке резанием с объяснением природы тех факторов, которые на него влияют.

Цель работы - теоретическое описание вибрационного увода при резании на примере радиальных колебаний одномассовой системы с одной степенью свободы при точении с использованием классической теории колебаний. Для этого поставлены следующие задачи: составить уравнение радиальных колебаний с учетом их влияния на глубину резания, вывести из него вибрационный увод, сравнить величины увода, полученного разными методами, и объяснить разницу.

2. Основное содержание и результаты работы.

Рассматривается одномассовая динамическая система (ДС), имеющая одну степень свободы в радиальном направлении. Это простейшее представление, однако, позволяет теоретически описать и объяснить природу и величину отжатия при обработке резанием.

Будем считать резец считается жестко закрепленным, а заготовку - приведенной массой m , вращающейся с угловой скоростью ν и совершающей радиальные колебания на

пружине с коэффициентом жесткости c под действием радиальной составляющей P_y силы резания, которой противодействуют упругая восстанавливающая сила F_y и сила сопротивления F_c (рис. 1). Потери энергии, согласно гипотезе внутреннего трения, пропорциональны скорости колебаний и характеризуются коэффициентом вязкого трения b .

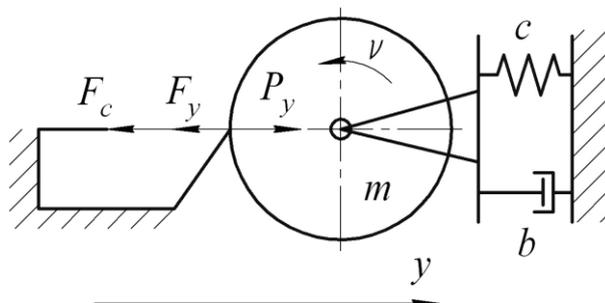


Рисунок 1. Схема динамической системы радиальных колебаний заготовки

Радиальная сила резания P_y определяется с использованием эмпирической зависимости вида [4]

$$P_y = 10 C_p V^l s^m h^n K_p, \text{ Н}, \quad (1)$$

где C_p, K_p, l, m, n - эмпирические коэффициенты, учитывающие условия обработки; V, s, h - фактические скорость резания (м/мин), подача (мм/об) и глубина резания (мм) соответственно. В системе СИ зависимость (1) будет иметь вид

$$P_y = k_p V^l s^m h^n, \quad (2)$$

где

$$k_p = 10 C_p K_p 60^l 1000^m 1000^n. \quad (3)$$

Полагая колебания малыми и имея в виду непрерывность процесса резания, закон Гука для восстанавливающей силы и гипотезу Фойгта для силы сопротивления, уравнение динамики будет выглядеть следующим образом:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = P_y, \quad (4)$$

причем в каждый момент времени значение силы резания определяется мгновенными значениями режимов резания, которые, в свою очередь, зависят от малых колебаний. Поэтому правая часть уравнения (4) есть, вообще говоря, нелинейная функция малых перемещений, что обуславливает нелинейность системы.

Принимая во внимание лишь одну степень свободы – радиальные перемещения, перепишем уравнение (4) в виде

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = K (h_0 - y)^n, \quad (5)$$

где постоянный коэффициент

$$K = k_p V^l s^m, \quad (6)$$

h_0 - номинальная глубина резания, на которую «накладываются» радиальные колебания заготовки, описываемое функцией y . Знак «минус» говорит о том, что, согласно

представленной на рис. 1 схеме, движение заготовки вдоль оси y уменьшает фактическую глубину резания, а с нею и радиальную силу.

Принято также допущение, что все прочие параметры неизменны, в том числе радиальные колебания не влияют на фактическую подачу и скорость резания.

Поставим вопросом, как начинает вести себя динамическая система при обработке.

В начальный момент времени инструмент врезается во вращающуюся заготовку и выводит ее из состояния покоя. Действие резца на заготовку описывается силой P_y , которая в начальный момент времени теоретически равна правой части уравнения (5) при нулевом y , когда колебаний еще нет. Одновременно с этим заготовка под действием упругой восстанавливающей силы стремится вернуться в исходное состояние, чему способствует также сила сопротивления, характеризующая потери энергии. При этом в процессе обработки заготовка совершает колебания не около исходного состояния покоя ($y = 0$), а около некоторого значения \bar{y} , которое означает величину смещения положения равновесия. Величина \bar{y} называется уводом колебаний (вибрационным уводом) и соответствует некоторой постоянной величине действующей силы P_y , которую обозначим \bar{P}_y . Иными словами, постоянная \bar{P}_y «уводит» колебания заготовки на величину \bar{y} от исходного состояния покоя, а переменная составляющая силы соответствует собственно колебаниям.

Величина вибрационного увода \bar{y} есть координата равновесного положения в процессе колебаний. Если решение уравнения динамики получено, то \bar{y} можно приближенно определить как среднеинтегральное значение y в течение интервала времени с целым числом периодов. В силу этого постоянную \bar{P}_y можно толковать как среднее значение силы P_y . Но как найти вибрационный увод без решения уравнения динамики?

Упрощенно это часто делают, пренебрегая динамикой и рассматривая только статику. Тогда понятие вибрационного увода вообще вырождается в статическое упругое отжатие заготовки под действием статической силы

$$\bar{P}_y = Kh_0^n, \quad (7)$$

и определяется выражением

$$\bar{y} = \frac{Kh_0^n}{c}. \quad (8)$$

Рассмотрим еще одно понятие, известное из теории колебаний. Точки на фазовой плоскости, в которых одновременно скорость и первая производная от потенциальной энергии по координате равны нулю, соответствуют равновесным состояниям системы. С учетом того, что первая производная от потенциальной энергии по координате есть не что иное, как восстанавливающая сила $F_g(y)$, равновесное состояние имеет место при $F_g(y) = 0$. Далее, по физическому смыслу, система совершает колебания около равновесного положения, и величина \bar{y} будет являться координатой этого состояния равновесия, удовлетворяя уравнению $F_g(\bar{y}) = 0$. Например, для консервативной системы

$$m\ddot{y} + cy = 0, \quad (9)$$

описывающей свободные колебания, точка равновесия будет иметь место при $y = 0$. Кроме того, точка равновесного состояния называется особой точкой, т.к. в ней угловой коэффициент касательной к фазовой траектории становится неопределенным, в чем можно убедиться, если переписать (9) как

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= -cy, \end{aligned} \right\}$$

и разделить второе уравнение на первое, получив

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = -\frac{cy}{\dot{y}},$$

т.е. неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

В системе (5) восстанавливающая сила $F_g(y)$ содержится в самом уравнении:

$$F_g(y) = cy - K(h_0 - y)^n,$$

откуда радиальную силу резания P_y можно представить как отрицательную восстанавливающую силу. Иногда силу резания считают внешней силой, действующей на систему извне, что не отражает физической сущности процесса получающимися при этом линейными дифференциальными уравнениями. В данном случае о внешнем характере силы резания говорить нельзя в силу того, что ее величина зависит от малых колебаний:

$$P_y = f(y).$$

Отрицательной же восстанавливающей силой P_y является в том смысле, что она противодействует «положительной» восстанавливающей силе cy . Иными словами, если сила cy стремится вернуть систему в исходное состояние покоя, то сила P_y этому противодействует, а их совместное действие определяет равновесное состояние в процессе обработки.

Таким образом, полная восстанавливающая сила F_g , действующая в системе,

$$F_g(y) = F_y - P_y = cy - K(h_0 - y)^n. \quad (10)$$

Предположим, что наличие затухания не изменяет положения особых точек на фазовой плоскости, т.е. особые точки, найденные без учета диссипации, останутся таковыми и для системы (5). В пользу этой неизбежной гипотезы отметим тот факт, что для системы (9) введение диссипативного члена $b\dot{y}$ не изменяет координаты равновесного состояния $y = 0$. Ниже подкрепим ее результатами численного решения уравнения динамики.

Таким образом, чтобы найти особые точки – точки равновесного состояния системы, а вместе с ними и вибрационный увод, необходимо решить уравнение

$$cy - K(h_0 - y)^n = 0. \quad (11)$$

Поскольку n - произвольное число, то уравнение (11) в общем случае аналитически неразрешимо. Поэтому выполним его приближенное решение, разложив в ряд Тейлора в окрестности \bar{y} до линейного члена силу резания P_y . Будем иметь

$$cy - K(h_0 - \bar{y})^n + Kn(h_0 - \bar{y})^{n-1}(y - \bar{y}) = 0.$$

Воспользуемся тем обстоятельством, что величина \bar{y} увода колебаний мала по сравнению с номинальной глубиной h , в чем можно убедиться численным расчетом. Поэтому положим $\bar{y} = 0$, откуда следует, что

$$cy - Kh_0^n + Knh_0^{n-1}y = 0,$$

и тогда

$$y = \frac{Kh_0^n}{c + Knh_0^{n-1}}. \tag{12}$$

Выражение (12) можно получить другим способом, переписав непосредственно уравнение динамики (5) без учета диссипации и разложив правую часть до линейного члена в окрестности \bar{y} :

$$m\ddot{y} + \left[c + Kn(h_0 - \bar{y})^{n-1} \right] y = K(h_0 - \bar{y})^n \left[1 + \frac{n}{h_0 - \bar{y}} \bar{y} \right].$$

Если здесь снова положить $\bar{y} = 0$, то получим

$$m\ddot{y} + \left[c + Knh_0^{n-1} \right] y = Kh_0^n$$

и представим функцию y как

$$y = y_0 + y_1,$$

где y_0 - постоянная величина.

Тогда

$$\ddot{y}_1 + \omega'^2 y_1 = \frac{Kh_0^n}{m},$$

где

$$\omega'^2 = \frac{c + Knh_0^{n-1}}{m}.$$

Приравняв коэффициенты при y_0 и y_1 , получим два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \omega'^2 y_0 &= \frac{Kh_0^n}{m}, \\ \ddot{y}_1 + \omega'^2 y_1 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

первое из которых определяет величину y_0 , равную

$$y_0 = \frac{Kh_0^n}{c + Knh_0^{n-1}},$$

а второе - переменную функцию y_1 , описывающую свободные колебания с частотой ω' .

Очевидно, что y_1 есть центрированная либрация, а y_0 - тот самый увод колебаний, который соответствует равновесному состоянию. С учетом этого подытожим, что \bar{y} , y_0 и значение y (12) как корня алгебраического уравнения (11) суть одно и то же, а именно: увод колебаний, определяющий равновесное положение системы (5), около которого совершаются колебания. Таким образом, окончательно запишем, что

$$\bar{y} = \frac{Kh_0^n}{c + Knh_0^{n-1}}. \quad (13)$$

Выражение (13), формально противореча дважды использованному выше допущению $\bar{y} = 0$, по существу таким свойством не обладает. При выводе выражения (12) это допущение означало, что величина увода мала и ею можно пренебречь при разложении восстанавливающей силы в ряд Тейлора. Иными словами, раскладывать восстанавливающую силу в ряд Маклорена, считая, что в силу малости \bar{y} погрешность такого представления будет мала в сравнении с разложением в окрестности «истинного» положения равновесия. Выражение (13), полученное другим способом, это подтверждает.

Из (13) следует понятие обобщенной жесткости, характеризуемой коэффициентом

$$c' = c + Knh_0^{n-1}, \quad (14)$$

т.е. увод колебаний определяется отношением стационарной силы без учета колебаний к обобщенной жесткости, состоящей из статической и динамической составляющих. Наличие последней впервые установил Н.А. Дроздов, который назвал ее жесткостью резания [5]. Она является одной из причин запаздывания изменения сил резания от колебательных перемещений [6, 7].

Выполним сравнение (8) и (13) с результатами численного решения алгебраического уравнения (11) и дифференциального уравнения (5) без и с учетом затухания. Для этого зададимся следующими параметрами, рассматривая для примера черновое наружное продольное точение конструкционной стали твердосплавным инструментом. Будем считать геометрию инструмента и механические свойства обрабатываемого материала такими, что $K_p = 1$. Например, предел прочности 750 МПа, радиус при вершине твердосплавного резца 1 мм, $\gamma = 10^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\lambda = 0^\circ$. Показатель степени $n = 0,9$ [4]. Пусть угловая скорость вращения заготовки $\omega = 100$ рад/с, а режимы обработки $V = 2$ м/с, $s = 0,0006$ м, т.е. 0,6 мм/об. При заданной угловой скорости это соответствует диаметру заготовки 40 мм. Используя (3) и (6), находим, что $K = 2,13 \cdot 10^5$. Приведенная масса $m = 10$ кг.

Будем варьировать двумя параметрами – номинальной глубиной h_0 и статической жесткостью c , не вдаваясь в вопрос о практической осуществимости их сочетаний и ставя прежде всего задачу сравнения величин вибрационного увода, полученных разными методами. Примем в качестве основных значений этих факторов следующие: $h_0 = 0,001$ м, $c = 5 \cdot 10^6$ Н/м. При изменении одного из факторов другой принимает указанное значение.

В таблице 1 приведены результаты расчета увода колебаний, причем строка с основными значениями факторов содержится в двух частях таблицы. Столбец, содержащий численно найденный корень алгебраического уравнения (11), затемнен, а эти данные приняты в качестве «истинного» увода колебаний, поскольку найдены исходя

из самого определения увода как координаты равновесного положения. Последний столбец содержит значение увода как упругого отжатия, найденного статическим методом на основании статической жесткости c . Предпоследний столбец содержит значение увода, найденного динамическим методом с учетом обобщенной жесткости c' .

При решении дифференциального уравнения (5) без затухания в качестве увода принято среднеинтегральное значение функции y в течение интервала времени, содержащего целое число периодов (количество периодов не влияет на расчетную величину увода). При решении дифференциального уравнения (5) с учетом затухания в качестве расчетной величины увода принято установившееся значение функции y по затухании колебательного движения (величина затухания не влияет на это значение, определяя лишь промежуток времени до его установления). Дифференциальные уравнения решены при начальных условиях $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = 0$, где начальное отклонение, принятое равным 1 мм, впрочем, не влияет на величину увода.

Таблица 1. – Сравнение значений увода колебаний, вычисленного разными методами

Варьируемый	Увод колебаний \bar{y} , мкм, найденный				
	численно			аналитически	
	при решении уравнения динамики (5)		при решении алгебраического уравнения $cy - K(h_0 - y)^n = 0$ (11)		
	без затухания	с затуханием	как корень уравнения	$\bar{y} = \frac{Kh_0^n}{c'}$	$\bar{y} = \frac{Kh_0^n}{c}$
$c, \text{ Н/м}$					
$0,5 \cdot 10^6$	468 (2%)	476	476	482 (1%)	851 (79%)
$1 \cdot 10^6$	300 (2%)	306	306	308 (1%)	425 (39%)
$5 \cdot 10^6$	77 (2%)	79	79	79	85 (8%)
$10 \cdot 10^6$	40 (2%)	41	41	41	43 (5%)
$h_0, \text{ мм}$					
1	77 (2%)	79	79	79	85 (8%)
2	148	148	148	148	159 (7%)
3	213	214	214	214	229 (7%)
4	276 (1%)	278	278	278	296 (6%)

Примечание. В скобках указана относительная погрешность в сравнении с данными затменного столбца, принятыми за «истинный» увод колебаний. Погрешность менее 1% не указана.

Перейдем к анализу полученных данных. Оба фактора – номинальная глубина резания h_0 и статическая жесткость c – существенно влияют на величину увода. С увеличением глубины увод увеличивается, поскольку возрастает сила резания. С увеличением статической жесткости c увод уменьшается, что вполне понятно: при большей жесткости деформации меньше.

Сравним теперь результаты, полученные разными методами. Высокую точность имеет содержащееся в предпоследнем столбце аналитическое выражение (13), выве-

денное из линеаризованного уравнения в предположении о малости увода в сравнении с глубиной резания. Погрешность в этом случае не превышает 1%. Стоит, однако, заметить, что при другом показателе степени n расхождение резко возрастает. Так, при $n = 0,3$ результаты различаются в два раза. Правда, в соответствии со справочными данными [1], n составляет не менее 0,6, но т.к. речь идет о *точности метода*, то этот факт следует принимать во внимание – при большой нелинейности линеаризованное выражение (13) может давать большое отклонение. В целом же величина увода, найденная по (13) с учетом обобщенной жесткости c' , достаточно хорошо согласуется с точной величиной \bar{y} .

Увод колебаний, найденный как статическое отжатие (8), имеет низкую точность, и этот метод пригоден лишь при большой статической жесткости. С уменьшением статической жесткости расхождение резко возрастает. Связано это с тем, что статическая жесткость c приближается по величине к K (в данном случае $K = 2,13 \cdot 10^5$), и когда их разница составляет менее порядка, статический метод начинает давать резко завышенный результат. При сопоставимости величин c и K погрешность еще более возрастает. Это объясняется тем, что обобщенная жесткость c' складывается из статической жесткости c и «динамической жесткости» $Kn h_0^{n-1}$. При $c \gg K$ влиянием «динамической жесткости» можно пренебречь, поэтому статический метод дает хороший результат. При уменьшении c и относительном увеличении влияния K статический метод, не учитывающий это явление, становится непригодным. Подобные рассуждения могут иметь место и в том случае, когда изменяется n . На практике это означает, например, изменение вида обработки, обрабатываемого материала и т.д.

Влияние глубины резания на точность определения увода кажется на первый взгляд несущественным, но это вызвано тем, что в качестве базовых приняты значения параметров $c = 5 \cdot 10^6$ Н/м, $n = 0,9$, т.е. рассматривается «почти линейная» система с большим отношением статической жесткости к динамической. С изменением n при разных глубинах резания погрешность может быть существенной.

В целом метод определения увода как статического упругого отжатия дает слишком завышенный результат, что связано с игнорированием динамики процесса. Поэтому его можно использовать только в том случае, если заведомо известно, что система имеет высокую статическую жесткость и обладает слабой нелинейностью.

Рассмотрим результаты решения дифференциального уравнения (5). Можно сразу отметить почти полное совпадение значений увода с его точным значением. Однако заметно, что среднеинтегральное значение y (обозначим его y_{cp}) для консервативной системы несколько меньше точного. В том, что «точное» значение \bar{y} действительно является таковым, можно убедиться двумя способами:

1) при задании начального отклонения, равного «точному» значению \bar{y} , и нулевой начальной скорости, колебания не возникают, что подтверждает: \bar{y} есть координата равновесного положения системы;

2) при затухании функция y стремится именно к «точному» значению \bar{y} .

Таким образом, эта небольшая разница не связана с погрешностью решения дифференциального уравнения или самим представлением увода как координаты, около которой совершаются колебания. Причина состоит в нелинейности: средняя центрированная либрация нелинейной системы (5) не равна нулю, а имеет отрицательное значение, несколько смещая «в минус» относительно увода \bar{y} среднеинтегральное значение

ние u_{cp} . В линейных системах подобное невозможно, т.к. их решением является суперпозиция синусоид с нулевой средней центрированной либрацией. Но в данном случае решением будет несимметричная относительно увода функция, что, впрочем, не отменяет того факта, что система совершает колебания именно «около» \bar{y} . На практике эта разница едва ли будет существенной, однако теоретически она существует. Так, при рассмотренных выше основных значениях параметров максимальное отклонение функции y «вверх» от увода равно 921 мкм, а «вниз» – 924 мкм, т.е. имеет место несимметричность, вызванная нелинейностью. Интересно отметить, что при решении линеаризованного уравнения динамики u_{cp} в точности совпадает с \bar{y} , что подчеркивает именно «нелинейное происхождение» этой разницы.

3. Выводы.

На примере радиальных колебаний одномассовой динамической системы с одной степенью свободы при точении выведено выражение для вибрационного увода как координаты смещения положения равновесия. Из него следует, что величина вибрационного увода, или среднее отжатие в процессе колебаний, определяется статической жесткостью и динамической составляющей, или жесткостью резания. Статическое определение упругого отжатия дает небольшую погрешность только тогда, когда статическая жесткость намного больше жесткости резания, а нелинейность системы, зависящая от условий обработки, мала.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И. И. Блехмана. – 1979. – 351 с.
2. Моргунов, А.П. Моделирование процесса упругих отжатий при различных способах установки на примере обработки гладкого вала / А.П. Моргунов, А.А. Федоров, Р.Л. Артюх // Динамика систем, механизмов и машин. – 2014. № 2. – С. 336-338.
3. Меньшов, А.Л. Физико-математическая модель фрезерной технологической системы пониженной виброустойчивости для исследования динамических явлений и явлений увода, отжатия и подрезания // А.Л. Меньшов, В.В. Голикова // Системный анализ и аналитика. – 2020. – № 1 (12). – С. 68-75.
4. Справочник технолога-машиностроителя. В 2-х т. Т.2 / Под ред. А. М. Дальского, А. Г. Косиловой, Р. К. Мещерякова, А.Г. Сулова. – 5-е изд., исправл. – М.: Машиностроение-1, 2003. – 944 с.
5. Дроздов, Н.А. Условие виброустойчивости процесса обработки на металлорежущих станках / Н.А. Дроздов // Новые исследования в области обработки резанием металлов и пластмасс. – М: Машгиз, 1952. – С. 133 – 145.
6. Быкадор, В.С. Возникновение автоколебаний в простейшей системе резания металлов / В.С. Быкадор, Г.Ю. Костенко, Т.С. Бабенко // Вестник Воронежского гос. техн. ун-та. – 2016. – Т. 12. № 2. – С. 119–123.
7. Быкадор, В.С. Исследование устойчивости подсистемы инструмента в осевом направлении в зависимости от параметра запаздывания и жесткости процесса точения / О.В. Тетенко, А.А. Австрийченко, Е.С. Шаламов Е.С. // Молодой исследователь Дона. – 2018. – № 4 (13). – С. 152-155.

Поступила в редколлегию 19.01.2022 г.